

偶数次のリーマンのテータ関係式

著者名(日)	北川 正一
雑誌名	教養研究
巻	18
号	2
ページ	17-32
発行年	2011-12
URL	http://id.nii.ac.jp/1265/00000353/

偶数次のリーマンのテータ関係式

北川 正一

1 リーマンのテータ関係式

1.1 記号

本論文で用いる記号をまとめておく。

\mathbb{Z} : 有理整数環 \mathbb{Q} : 有理数体 \mathbb{R} : 実数体 \mathbb{C} : 複素数体

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$: 上半平面

$m \in \mathbb{Z}, m > 0$ に対し, $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$

$M(n, \mathbb{Z})$: 整数係数 n 次正方行列の集合

$O(n)$: n 次直交行列の集合

I_n : n 次単位行列

1.2 テータ函数

テータ函数 ϑ は以下で定義される解析函数である ([U])。

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] (\tau | x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e \left(\frac{1}{2} (n+s)^2 \tau + (n+s)(x+t) \right)$$

ここで, $\tau \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{C}$, $s, t \in \mathbb{R}$ であり, $e(\cdot) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$ とする。

1.3 古典的テータ関係式

よく知られているリーマンのテータ関係式 (R) (の一つ) は次のように表される。

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4),$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \quad y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

とするとき,

$$\begin{aligned} & \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_1) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_2) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_3) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_4) \\ & + \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_1) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_2) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_3) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_4) \\ & + \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_1) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_2) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_3) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_4) \\ & + \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_1) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_2) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_3) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right] (\tau | x_4) \\ & = 2 \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | y_1) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | y_2) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | y_3) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (\tau | y_4) \cdots (R) \end{aligned}$$

が成立する。本論文では, この公式の拡張について取り扱う。

2 ある条件を満たす行列の性質

2.1 ${}^tAA = m^2I_n$ なる行列 A

[M] に従い, 次の条件を満たす行列 A について考察する。

成分が整数である n 次正方行列 $A \in M(n, \mathbb{Z})$ で, $m \in \mathbb{Z}, m > 0$ に対し,

$${}^tAA = m^2I_n$$

を満たすものを考える。 $\frac{1}{m}A$ は直交行列である。

2.2 特定の形をした $2m$ 次の A

以降, 整数 $m \geq 2$ を固定し,

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \in M(2m, \mathbb{Z})$$

とおく。 A は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - mI_{2m}$$

と分解され, ${}^tAA = m^2I_{2m}$ が成り立つ。これより,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix}$$

とすると,

$$(y_1 \cdots y_{2m}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = m^2 (x_1 \cdots x_{2m}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix}$$

から,

$$((1-m)x_1 + \cdots + x_{2m})^2 + \cdots + (x_1 + \cdots + (1-m)x_{2m})^2 = m^2(x_1^2 + \cdots + x_{2m}^2)$$

なる 2 次の恒等式が得られる。

また,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \text{固有値 } m \text{ の固有ベクトル} \right)$$

となっており,

$$\left(\frac{1}{m}A\right)^{-1} = \frac{1}{m} {}^t A = \frac{1}{m} A$$

より, $\frac{1}{m}A \in O(2m)$ である。よって,

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_{2m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{2m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_{2m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2m} \end{pmatrix}$$

に対し,

$$(u_1 \cdots u_{2m}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2m} \end{pmatrix} = (u'_1 \cdots u'_{2m}) \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_{2m} \end{pmatrix}$$

となる ($[K]$)。特に, $\sum_{i=1}^{2m} u_i^2 = \sum_{i=1}^{2m} u_i'^2$ が成り立ち,

$$\frac{1}{m} A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから, $\sum_{i=1}^{2m} u_i = \sum_{i=1}^{2m} u'_i$ となっている。

さらに $\left(\frac{1}{m}A\right)^2 = I_{2m}$ より, $\frac{1}{m}A$ の固有値は, ± 1 である。よって, A の固有値は $\pm m$ のいずれかである。

2.3 A によるパラメータ変換

次に、以下の写像について調べる。

$$\begin{array}{ccc} f_{\frac{1}{m}A}: \mathbb{R}^{2m} & \rightarrow & \mathbb{R}^{2m} \\ \psi & & \psi \\ x & \mapsto & \frac{1}{m}Ax \end{array}$$

$f_{\frac{1}{m}A}$ は全単射であり, $f_{\frac{1}{m}A}^{-1} = f_{(\frac{1}{m}A)^{-1}} = f_{\frac{1}{m}A}$ となる。

$0 \leq k < m$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し, $S_k \subset \mathbb{Q}^{2m}$ を

$$S_k = \left\{ \left(\begin{array}{c} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k}{m} \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} n_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \dots, 2m) \\ \sum_{i=1}^{2m} n_i + k \equiv 0 \pmod{m} \end{array} \right\}$$

と定義する。

$$n_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \dots, 2m), \quad \left(\begin{array}{c} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k}{m} \end{array} \right) \in S_k$$

のとき,

$$k \equiv k' \pmod{m} \iff \left(\begin{array}{c} n_1 + \frac{k'}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k'}{m} \end{array} \right) \in S_k$$

であり, $k \not\equiv k' \pmod{m}$ ならば $S_k \cap S_{k'} = \emptyset$ となっている。従って S_k は $[k] \in \mathbb{Z}_m$ により決定され, $\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ は直和である。

命題

$[k] \in \mathbb{Z}_m$ を完全代表系とするとき, 定義域を $\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ に制限すると,

$f_{\frac{1}{m}A} \Big| \bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ は, $\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ と \mathbb{Z}^{2m} の間の 1 対 1 対応をあたえる。

証明

$f_{\frac{1}{m}A}$ は単射であるから, $f_{\frac{1}{m}A} \left(\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k \right) = \mathbb{Z}^{2m}$ を示せばよい。

$n_1, \dots, n_{2m} \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{m}A} \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m} \left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - m I_{2m} \right] \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} + \frac{n_1 + \cdots + n_{2m}}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より, $k \equiv n_1 + \cdots + n_{2m} \pmod{m}$ なる k に対し,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} \right) \in S_k$$

となっている。従って, $f_{\frac{1}{m}A}(\mathbb{Z}^{2m}) \subset \bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ であるが, これより,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k \right) \supset f_{\frac{1}{m}A} (f_{\frac{1}{m}A}(\mathbb{Z}^{2m})) = \mathbb{Z}^{2m}$$

が得られる。

逆に, $k = 0, 1, \dots, m-1$ に対して,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\begin{pmatrix} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} A \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left[\frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - I_{2m} \right] \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{m} (n_1 + \cdots + n_{2m} + k) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より, $f_{\frac{1}{m}A}(S_k) \subset \mathbb{Z}^{2m}$ である。従って,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k \right) \subset \mathbb{Z}^{2m}$$

が成立する。

以上から,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k \right) = \mathbb{Z}^{2m}$$

となることが確認できた。すなわち, $f_{\frac{1}{m}A} \Big| \bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ により, $\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ と \mathbb{Z}^{2m}

は 1 対 1 に対応している。(証明終)

この $\frac{1}{m}A$ による対応は, 総和を取る場合の変数変換に用いられる。

3 偶数次のテータ関係式の系列

以降では $\tau \in \mathbb{H}$ は固定されるので,

$$\vartheta \left[\begin{matrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{matrix} \right] (\tau|z) = \vartheta \left[\begin{matrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{matrix} \right] (z)$$

と表記し、さらに簡単のため $\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z) = \vartheta(z)$ と書くことにする。

3.1 ϑ の $2m$ 次式の和

まず、次のような ϑ の $2m$ 次式を計算すると、

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \left(z_i + \frac{j+k\tau}{m} \right) \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_{2m} \in \mathbb{Z}} e \left(\frac{1}{2} \left(n_1 + \frac{k}{m} \right)^2 \tau + \dots + \frac{1}{2} \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right)^2 \tau \right. \\ & \quad \left. + \left(n_1 + \frac{k}{m} \right) z_1 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right) z_{2m} \right. \\ & \quad \left. + \frac{j}{m} (n_1 + \dots + n_{2m}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} \right)^2 2m\tau - \frac{k}{m} (z_1 + \dots + z_{2m}) \right) \\ &= e \left(-\frac{k}{m} (k\tau + z_1 + \dots + z_{2m}) \right) \\ & \quad \sum_{n_1, \dots, n_{2m} \in \mathbb{Z}} e \left(\frac{1}{2} \left(n_1 + \frac{k}{m} \right)^2 \tau + \dots + \frac{1}{2} \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right)^2 \tau \right. \\ & \quad \left. + \left(n_1 + \frac{k}{m} \right) z_1 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right) z_{2m} \right. \\ & \quad \left. + \frac{j}{m} (n_1 + \dots + n_{2m}) \right) \end{aligned}$$

と求められる。この結果に注意して、

$$\eta(j, k) = \frac{k}{m} (j + k\tau + z_1 + \dots + z_{2m})$$

とおき、次の和を考える。

$$\sum_{j,k=0}^{m-1} e(\eta(j, k)) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \left(z_i + \frac{j+k\tau}{m} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=0}^{m-1} \left[\sum_{n_1, \dots, n_{2m} \in \mathbb{Z}} e \left(\frac{1}{2} \left(n_1 + \frac{k}{m} \right)^2 \tau + \dots + \frac{1}{2} \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right)^2 \tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(n_1 + \frac{k}{m} \right) z_1 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right) z_{2m} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{j}{m} (n_1 + \dots + n_{2m} + k) \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{n_1, \dots, n_{2m} \in \mathbb{Z}} e \left(\frac{1}{2} \left(n_1 + \frac{k}{m} \right)^2 \tau + \dots + \frac{1}{2} \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right)^2 \tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(n_1 + \frac{k}{m} \right) z_1 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right) z_{2m} \right) \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=0}^{m-1} e \left(\frac{j}{m} (n_1 + \dots + n_{2m} + k) \right) \right] \quad \dots (*)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{j=0}^{m-1} e \left(\frac{j}{m} (n_1 + \dots + n_{2m} + k) \right) = \begin{cases} 0 & (n_1 + \dots + n_{2m} + k \not\equiv 0 \pmod{m}) \\ m & (n_1 + \dots + n_{2m} + k \equiv 0 \pmod{m}) \end{cases}$$

であることから,

$$\begin{aligned}
(*) &= m \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2m} \in \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^{2m} n_i + k \equiv 0 \pmod{m}}} e \left(\frac{1}{2} \left(\left(n_1 + \frac{k}{m} \right)^2 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right)^2 \right) \tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(n_1 + \frac{k}{m} \right) z_1 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right) z_{2m} \right) \right] \\
&= m \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{\left(n_i + \frac{k}{m} \right)_{i=1}^{2m} \in S_k} e \left(\frac{1}{2} \left(\left(n_1 + \frac{k}{m} \right)^2 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right)^2 \right) \tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(n_1 + \frac{k}{m} \right) z_1 + \dots + \left(n_{2m} + \frac{k}{m} \right) z_{2m} \right) \right] \quad \dots (**)
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} \widetilde{n_1} \\ \vdots \\ \widetilde{n_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k}{m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{z_1} \\ \vdots \\ \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix}$$

とおくと, k, n_i に関する和は絶対収束し, 前節の 命題 から,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{n_1} \\ \vdots \\ \widetilde{n_{2m}} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2m}$$

についての和に置き換えることができ,

$$\begin{aligned} (n_1 + \frac{k}{m})^2 + \cdots + (n_{2m} + \frac{k}{m})^2 &= \widetilde{n_1}^2 + \cdots + \widetilde{n_{2m}}^2 \\ (n_1 + \frac{k}{m})z_1 + \cdots + (n_{2m} + \frac{k}{m})z_{2m} &= \widetilde{n_1}\widetilde{z_1} + \cdots + \widetilde{n_{2m}}\widetilde{z_{2m}} \end{aligned}$$

が成立するので,

$$\begin{aligned} (**) &= m \sum_{\widetilde{n_1}, \dots, \widetilde{n_{2m}} \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{1}{2}(\widetilde{n_1}^2 + \cdots + \widetilde{n_{2m}}^2)\tau + \widetilde{n_1}\widetilde{z_1} + \cdots + \widetilde{n_{2m}}\widetilde{z_{2m}}\right) \\ &= m\vartheta(\widetilde{z_1}) \cdots \vartheta(\widetilde{z_{2m}}) \end{aligned}$$

と整理することができる。

3.2 偶数次テータ関係式

前節の結果に平行移動の変換公式

$$\vartheta\left(z + \frac{j+k\tau}{m}\right) = e\left(-\frac{k}{m}\left(\frac{1}{2}\frac{k}{m}\tau + \frac{j}{m} + z\right)\right) \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{matrix}\right](z)$$

を組み合わせると,

$$e(\eta(j, k)) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta\left(z_i + \frac{j+k\tau}{m}\right) = e\left(-\frac{jk}{m}\right) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{matrix}\right](z_i)$$

となり, 次の結果が得られる。

定理 1 (偶数次のテータ関係式)

$m \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$ に対し, 次のテータ関係式が成立する。

$$\sum_{j,k=0}^{m-1} e\left(-\frac{jk}{m}\right) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{matrix}\right](z_i) = m \prod_{i=1}^{2m} \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right](z_i)$$

ただし,

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{2m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1-m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix}$$

である。

上式は $m=1$ に対しても記述できるが, それは自明な関係式となる。

この定理は任意の偶数に対し, それを次数とするテータ関係式の系列をあたえるものである。

3.3 古典的テータ関係式との関係

$m=2$ の場合, 定理 1 の関係式は,

$$\begin{aligned} & \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right](z_1) \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right](z_2) \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right](z_3) \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right](z_4) \\ & + \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_1) \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_2) \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_3) \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_4) \\ & + \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right](z_1) \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right](z_2) \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right](z_3) \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right](z_4) \\ & - \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_1) \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_2) \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_3) \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right](z_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{-z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{2} \right) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{z_1 - z_2 + z_3 + z_4}{2} \right) \\
 &\quad \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{z_1 + z_2 - z_3 + z_4}{2} \right) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{z_1 + z_2 + z_3 - z_4}{2} \right)
 \end{aligned}$$

となるが, $z_1 = -x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3$, $z_4 = x_4 \cdots$ (†) とおくと,

$$\begin{aligned}
 &\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (-x_1) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (x_2) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (x_3) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (x_4) \\
 &+ \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (-x_1) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_2) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_3) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_4) \\
 &+ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (-x_1) \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (x_2) \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (x_3) \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (x_4) \\
 &- \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (-x_1) \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_2) \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_3) \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_4) \\
 &= 2\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} \right) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{-x_1 - x_2 + x_3 + x_4}{2} \right) \\
 &\quad \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{-x_1 + x_2 - x_3 + x_4}{2} \right) \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{-x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{2} \right)
 \end{aligned}$$

と書き直される。 $\vartheta \begin{bmatrix} \frac{j}{2} \\ \frac{k}{2} \end{bmatrix}$ は $j = k = 1$ のときのみ奇函数で, その他は偶函数であるので, この関係式は古典的リーマンのテータ関係式 (R) に一致する。従って, 定理 1 は古典的テータ関係式の一つの拡張となっている。

対応する行列 A は次のものである。

$$(R): A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{定理 1: } A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

これらは特定のブロック部の符号を反転したものとなっているが、これは変数の符号の変換 $(+)$ に対応している。すなわち、 $(+)$ の変換をあたえる行列

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$A_R = -T^{-1}A_4T$$

なる関係が成立している。

4 指標の変換と拡張されたテータ関係式

4.1 係数部分の表示

定理 1 のテータ関係式の左辺の各変数に $z_i + \frac{p_i + q_i\tau}{m}$, ($p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, 2m$) を代入し、平行移動の変換式

$$\vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{array} \right] \left(z_i + \frac{p_i + q_i\tau}{m} \right) = e \left(-\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{j + p_i}{m} + z_i \right) \right) \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{k + q_i}{m} \\ \frac{j + p_i}{m} \end{array} \right] (z_i)$$

を用いると、左辺の係数に現れる指数部分は、

$$\begin{aligned} & -\frac{kj}{m} - \sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{j + p_i}{m} + z_i \right) \right) \\ & = -\sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{p_i}{m} + z_i \right) \right) - \frac{j}{m} \left(k + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m} q_i \right) \end{aligned}$$

となる。

一方,

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{z}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p_{2m}} & \widetilde{q_{2m}} & \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m} & q_{2m} & z_{2m} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\frac{1}{m} A \begin{pmatrix} z_1 + \frac{p_1 + q_1 \tau}{m} \\ \vdots \\ z_{2m} + \frac{p_{2m} + q_{2m} \tau}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 + \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{q}_1 \tau}{m} \\ \vdots \\ \widetilde{z_{2m}} + \frac{\widetilde{p_{2m}} + \widetilde{q_{2m}} \tau}{m} \end{pmatrix}$$

であるから, 右辺の係数部分は以下になる。

$$- \sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{\tilde{q}_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{\tilde{q}_i}{m} \tau + \frac{\tilde{p}_i}{m} + \tilde{z}_i \right) \right)$$

4.2 拡張されたテータ関係式

$\frac{1}{m} A \in O(2m)$ より,

$$\sum_{i=1}^{2m} q_i^2 = \sum_{i=1}^{2m} \tilde{q}_i^2, \quad \sum_{i=1}^{2m} p_i q_i = \sum_{i=1}^{2m} \tilde{p}_i \tilde{q}_i, \quad \sum_{i=1}^{2m} q_i z_i = \sum_{i=1}^{2m} \tilde{q}_i \tilde{z}_i$$

であるから, 定理 1 の関係式の両辺の係数部分について,

$$\sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{p_i}{m} + z_i \right) \right) = \sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{\tilde{q}_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{\tilde{q}_i}{m} \tau + \frac{\tilde{p}_i}{m} + \tilde{z}_i \right) \right)$$

が成立する。ただし,

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{p_{2m}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{q_{2m}} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2m}$$

でなければならないことに注意する。第 2 節で調べた $f_{\frac{1}{m}A}$ の性質から, ある k に対し,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2m} \end{pmatrix} \in S_k \cap \mathbb{Z}^{2m}$$

となるが, $k \neq 0$ の場合は $S_k \cap \mathbb{Z}^{2m} = \emptyset$ であるから,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2m} \end{pmatrix} \in S_0$$

すなわち, $\sum_{i=1}^{2m} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m} q_i \equiv 0 \pmod{m}$ となる必要がある。

以上から, 係数を比較し整理すると次の形のテータ関係式を得る。

定理 2 (拡張されたテータ関係式)

$m \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$ とし,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1} & \widetilde{q_1} & \widetilde{z_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p_{2m}} & \widetilde{q_{2m}} & \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m} & q_{2m} & z_{2m} \end{pmatrix}$$

とおくと, 次のテータ関係式が成立する。

$$\sum_{j,k=0}^{m-1} e\left(-\frac{j}{m}\left(k + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m} q_i\right)\right) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{k+q_i}{m} \\ \frac{j+p_i}{m} \end{matrix}\right](z_i) = m \prod_{i=1}^{2m} \vartheta\left[\begin{matrix} \frac{\widetilde{q_i}}{m} \\ \frac{\widetilde{p_i}}{m} \end{matrix}\right](\widetilde{z_i})$$

ただし, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $(i = 1, \dots, 2m)$ は,

$$\sum_{i=1}^{2m} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m} q_i \equiv 0 \pmod{m}$$

を満たすものとする。

この関係式は, 特殊な場合 ($m = 2$) として古典的なリーマンのテータ関係式を含むものである。各項は周期の $\frac{1}{m}$ 刻みの指標を持つ ϑ についての $2m$ 次式となっており, 高次 (偶数次) のテータ関係式となっている。

参考文献

- [M] Mumford, D., Tata Lectures on Theta I, Progress in Mathematics, Vol. 28, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983
- [U] 梅村 浩, 「楕円関数論」楕円曲線の解析学, 東京大学出版会, 2000
- [K] 北川 正一, 「テータ函数の変換公式について」, 九州国際大学教養研究 第18巻 第1号 (2011年7月)